

Лабораторная работа □ 2

Цель работы

Изучение методов цифрового спектрального анализа сигналов в гармоническом базисе, ознакомление с существующими алгоритмами дискретного преобразования Фурье, оценка возникающих погрешностей и их качественный визуальный контроль.

1. Краткие теоретические сведения

1.1. Дискретное преобразование Фурье

Рассмотрим некоторый аналоговый непериодический сигнал и соответствующий ему сплошной спектр (рис. 1).

Рис. 1. Непрерывный сигнал и соответствующий ему спектр

Если сигналы обрабатываются с помощью цифровых методов, то приходится прибегать к дискретному преобразованию Фурье (ДПФ). Запишем спектр дискретизированного сигнала:

$$(1)$$

Этот спектр сплошной, но повторяющийся с периодом (рис. 2).

Рис. 2. Дискретизированный сигнал и его спектр

Для осуществления цифровой обработки требуется дискретизация сигнала не только во временной, но и в частотной области. Это означает, что сплошной спектр должен быть представлен совокупностью своих значений на дискретных частотах.

Подобный спектр получается из сплошного при периодическом повторении последовательности с периодом . Интервал между соседними спектральными линиями , т.е. дискретному спектру соответствует периодически повторяющийся сигнал (рис. 3.).

Рис. 3. Дискретный спектр и соответствующий ему сигнал

Подставляя в выражение (1) , получаем следующее соотношение для прямого ДПФ:

Для обратного ДПФ формула имеет вид

В этих выражениях N - количество отсчетов сигнала. При этом получается и N частотных отсчетов.

1.2. Свойства ДПФ

1. Свойство периодичности: ДПФ формирует периодический спектр, а ОДПФ – периодический сигнал. Обычно на графиках спектр изображают в диапазоне изменения частоты от 0 до .

1. Свойство симметрии: при четном N и действительном

В частности, при , т.е. - действительное число. - тоже действительное число, т.к. .

3. Линейность. Если x и y есть ДПФ X и Y , то ДПФ $ax + by$, где a и b - произвольные константы, равно $aX + bY$.

4. Сдвиг. Пусть x ДПФ X , а y получают из x путем сдвига (в случае конечной последовательности – кругового сдвига) на n отсчетов. Тогда ДПФ Y равно $X e^{-j2\pi n f}$. Аналогичный результат справедлив для сдвига коэффициентов ДПФ. Если X и Y есть ДПФ x и y соответственно и $Y = X e^{-j2\pi n f}$, то $y = x$.

1.3. Особенности практического использования ДПФ

При использовании ДПФ чаще всего возникают три проблемы: появление ложных спектральных составляющих, замывание спектральных составляющих, паразитная амплитудная модуляция спектра (искажение). Рассмотрим эти явления подробнее.

1. Появление ложных спектральных составляющих (рис. 4) – это явление, при котором высокочастотные компоненты функции времени могут быть приняты за низкочастотные. Причина – недостаточная частота дискретизации (неправильный выбор T).

Рис. 4. Появление ложных спектральных составляющих

2. Размывание спектральных составляющих. Это явление возникает из-за того, что анализируется ограниченный массив данных. Отбрасывается все, что происходит до и после периода наблюдений, что эквивалентно умножению сигнала на прямоугольную выделяющую функцию с соответствующим изменением спектра (рис. 5).

Рис. 5. Размывание спектральных составляющих:

а – непрерывный сигнал и его спектр; б – прямоугольная выделяющая функция и ее спектр; в – результирующий сигнал и его спектр

Стандартный способ уменьшения этого явления – умножение сигнала на такую выделяющую функцию, которая имеет меньшие боковые лепестки. Однако снижение уровня боковых лепестков дается ценой расширения главного лепестка спектра окна, что приводит к ухудшению разрешения. Следовательно, необходим какой-то компромисс между шириной главного лепестка и уровнем подавления боковых лепестков. Существует много выделяющих функций, обладающих различными свойствами.

3. Паразитная амплитудная модуляция спектра. Каждому коэффициенту Фурье соответствует фильтр с частотной характеристикой вида (рис. 6, а). Это справедливо для случая прямоугольной выделяющей функции.

Главные лепестки представляют собой независимых фильтров. Входной сигнал с частотой, кратной , пройдет через соответствующий фильтр без изменений. Другие фильтры его подавят.

Эффект паразитной модуляции проявляется, когда вычисляются спектральные составляющие на частотах, не совпадающих с частотами, кратными . В наихудшем случае, когда рассчитывается сигнал между фильтрами, его уровень равен 0,647. Избежать этого эффекта можно двумя путями:

- рассчитывать спектры на частотах, кратных частоте ;
- если необходимо вести расчеты и на других частотах, то массив из исходных данных дополняют нулями, т.е. увеличивают период повторения исходного сигнала. При этом число фильтров ДПФ увеличивается, а расстояние между центральными частотами уменьшается (рис. 6 б)

Полоса пропускания фильтра не изменяется, т.к. она определяется величиной .

При = передаточные функции имеют вид:

;

Рис. 6. Частотная характеристика ДПФ:

а - отсчетов; б - отсчетов и нулей

1.4. Быстрое преобразование Фурье

Алгоритм ДПФ имеет существенный недостаток: большое число вычислительных операций. Для вычисления всех спектральных коэффициентов требуется N^2 умножений и столько же сложений.

Поэтому на практике часто применяют быстрое преобразование Фурье (БПФ). Суть этого алгоритма заключается в многократном членении заданной последовательности временных отсчетов на более короткие последовательности. Поясним достигаемый при этом выигрыш на примере одного первого разбиения.

Пусть задана последовательность отсчетов $x[n]$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, причем N - целое число. Разобьем эту последовательность на две последовательности, содержащие соответственно четные отсчеты и нечетные отсчеты. Введем обозначение $x_e[n]$. С учетом равенств $x_e[n] = x[2n]$; для четной последовательности отсчетов ДПФ имеет вид:

Для нечетной последовательности отсчетов ДПФ имеет вид:

Фазовый множитель $e^{-j\omega n}$ перед второй суммой учитывает задержку последовательности на один интервал относительно последовательности $x_e[n]$.

Спектры $X_e(\omega)$ и $X_o(\omega)$ также периодические, но с периодом π .

Найдем результирующий спектр. Для частот ω учтем периодичность спектров $X_e(\omega) = X_e(\omega + \pi)$; $X_o(\omega) = X_o(\omega + \pi)$. Кроме того, надо учитывать перемену знака перед фазовым множителем при $\omega \rightarrow \omega + \pi$:

,

т.к. $X_o(\omega + \pi) = X_o(\omega)$.

В результате получаем выражение для вычисления всей последовательности отсчетов спектра:

(2)

Это основное расчётное соотношение для БПФ. Спектр содержит спектральных отсчетов на интервале одного периода по оси .

Подсчитаем число операций, необходимых для получения спектральных коэффициентов при использовании этого метода. Для вычисления функций \cos и \sin требуется N умножений отсчетов на комплексные коэффициенты $e^{\pm jk\omega_0}$. Кроме того, требуется N умножений на коэффициент $1/N$. Всего требуется $2N$ умножений, т.е. почти в два раза меньше, чем при использовании алгоритма ДПФ.

Разбиением каждой последовательности можно осуществить дальнейшее уменьшение объема вычислений. Разбиения следует продолжать вплоть до получения простейших двухэлементных последовательностей. Определив ДПФ указанных простейших пар отсчетов, можно найти ДПФ 4-элементных, 8-элементных последовательностей и т.д. При объединении ДПФ двух последовательностей можно пользоваться алгоритмом (2), подставляя в него соответствующие значения N_1 и N_2 .

Подсчитаем суммарное число операций. При каждом разбиении последовательности на две более короткие требуется $2N$ умножений. При числе разбиений $\log_2 N$ общее число операций умножения $2N \log_2 N$. А для прямого вычисления ДПФ требуется $2N^2$ умножений. Тогда коэффициент ускорения вычислений (К.У.В.):

$K.U.B. = \log_2 N$.

Столь большое сокращение числа операций резко уменьшает объем аппаратуры и повышает быстроедействие цифровых устройств.

1.5. Примеры практического использования БПФ

1.5.1. Вычисление корреляционного интеграла и интеграла свертки является наиболее распространенной операцией, выполняемой устройствами обработки над принятой реализацией входного сигнала. В общем виде это следующий функционал:

$$J = \int_{-T}^T s(t) s^*(t) dt \quad (3)$$

где $s(t)$ - известная форма полезного сигнала; T - информационный параметр сигнала; T - интервал наблюдения реализации; $n(t)$ - аддитивный шум.

В дискретном виде (3) переписывается следующим образом:

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} s[k] s^*[k] \quad (4)$$

где N - число отсчетов сигнала; k - номер шага; N - максимальное число шагов; J - оценка функционала (3) при номере шага k .

Для вычисления функционала (4) требуется N^2 операций умножения и столько же сложения.

Теперь используем для этой цели алгоритм БПФ, основываясь на теореме свертки. Схема вычислений представлена на рис. 7.

Рис. 7. Структурная схема алгоритма вычислений свертки

На выходе БПФ1 получим дискретный спектр ; на выходе процессора БПФ2 получим ; на выходе перемножителя получим взаимный спектр . Применяя к ОБПФ, получаем .

Для выполнения БПФ и ОБПФ требуется по операций и ещё операций в умножителе. При параллельном вычислении БПФ1 и БПФ2 коэффициент ускорения вычислений

К.У.В.=.

Для $=2^{10}$, К.У.В.10.

Для вычисления корреляционных функций сигналов используется преобразование Винера-Хинчина, записываемое в дискретном виде:

,

что требует однократного вычисления БПФ.

1.5.2. Использование БПФ для интерполяции функций времени состоит в нахождении значений точек на кривой между уже известными точками.

Допустим, что известные точек представляют один период периодической, ограниченной по полосе функции. Тогда можно оценить функцию в раз большем количестве точек (где обязательно целое число), вычислив N -точечное ДПФ и поместив нулей в середину последовательности. Обратное преобразование тогда будет иметь точек, соответствующих интерполяции периодической функции с ограниченной полосой (рис. 8).

Рис. 8. Интерполяция функции :

а – исходная функция; б – спектр исходной функции;

в – интерполированная функция; г – измененный спектр

2. Описание лабораторного макета

Работа выполняется на персональном компьютере с помощью специальной программы, разработанной в среде визуального программирования 'DELPHI'. Программа

предназначена для выполнения лабораторных работ по курсу ЦОС и включает в себя четыре лабораторные работы. Выбор конкретной лабораторной работы осуществляется из главного меню с приглашением «Сделай выбор» путем установки с помощью манипулятора «мышь» указателя рядом с соответствующим названием и нажатия после этого кнопки с надписью 'OK'. Эти операции выполняются путем нажатия левой кнопки на манипуляторе «мышь».

В результате на экране окажется рабочее окно с названием данной работы. В нем находятся три более мелких окна.

В одно окно производится вывод изображения графика исходного сигнала. Второе предназначено для изображения рассчитанного амплитудного спектра и третье – для фазового спектра (или для сигнала, восстановленного с помощью ОБПФ).

Справа от этих окон расположена панель для выбора типа обрабатываемых сигналов и установки необходимых режимов обработки. Предусмотрен выбор исследуемого сигнала из 5 предлагаемых программой. Исследователь может выбрать число обрабатываемых периодов, число отсчетов дискретизации на период сигнала, длительность паузы в исследуемом сигнале, вид весовой функции. В разделе «Преобразование спектра» имеется возможность введения нулевых спектральных отсчетов для повышения качества интерполяции при восстановлении сигнала, а также формирования задержки сигнала посредством введения фазового сдвига в его спектр.

Все установки начинают действовать только после нажатия с помощью манипулятора «мышь» кнопки с названием «Применить».

При запуске программы лабораторной работы в ней действуют установки исходных данных, принятые «по умолчанию» при компиляции программы.

Окончание работы производится путём нажатия кнопки «Выход в меню».

3. Порядок выполнения работы

Перед выполнением работы необходимо изучить соответствующие разделы курса лекций или рекомендованной литературы и ответить на контрольные вопросы, приведенные в разделе 4.

В зависимости от номера бригады выберите из таблицы два сигнала для исследования в лабораторной работе и число обрабатываемых периодов.

Бригада

1

2

3

4

5

+

Треугольный

Число периодов

3.1. Исследование преобразования сигнала

Установите метку в строке «Обратное преобразование Фурье», при этом в третьем окне будет изображаться восстановленный дискретный сигнал. Исследуйте качество восстановления сигнала в зависимости от частоты дискретизации. Выберите число отсчетов дискретизации на период сигнала, достаточное для обеспечения приемлемого восстановления сигнала.

Зарисуйте исходный, дискретизированный и восстановленный сигналы, а также амплитудный и фазовый спектры (для получения изображения фазового спектра необходимо отключить обратное преобразование Фурье).

Варьируя длительностью паузы (в периодах сигнала), наблюдайте за изменениями спектра. Зарисуйте амплитудный спектр при значении паузы 10 периодов.

Сделайте выводы.

3.2. Исследование преобразования спектра

Включите режимы «Обратное преобразование Фурье», «Добавление нулевых отсчетов».

Варьируя количеством нулевых отсчетов, добавляемых в спектр сигнала, наблюдайте за изменением качества интерполяции восстановленного сигнала. Добейтесь наилучшего восстановления сигнала. Зарисуйте восстановленный сигнал. Запишите введенные значения.

Включите режим «Добавление фазы». Исследуйте поведение восстановленного сигнала при добавлении фазового сдвига в спектр дискретного сигнала перед процедурой восстановления. Зарисуйте характерные осциллограммы.

Сделайте выводы.

4. Контрольные вопросы

1. Принцип прямого и обратного ДПФ.
2. Спектр дискретизированного сигнала. Дискретный спектр и соответствующий ему сигнал.
3. Свойства ДПФ.

4. Принцип БПФ. Выражение для БПФ.
5. Объяснить причину сокращения количества операций при применении БПФ и оценить его значение.
6. Практическое использование БПФ (ДПФ).
7. Особенности практического использования ДПФ.
8. Интерполяция отсчетов сигнала с использованием ДПФ.

Библиографический список

1. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.
2. Гольденберг Л.М., Матюшкин В.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник. М.: Радио и связь, 1985. 312 с.
3. Гольденберг Л.М., Матюшкин В.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие для вузов. М.: Радио и связь, 1990. 258 с.
4. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.
5. Хэррис Ф. Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье // ТИИЭР. Т. 66. № 1. 1978. С. 60.
6. Дворкович А.В. Новый метод расчёта эффективных оконных функций, используемых при гармоническом анализе с помощью ДПФ // Цифровая обработка сигналов. № 2. 2001. С 49.
7. Теоретические основы цифровой обработки сигналов: Учеб. пособие/ В.В. Езерский, В.С. Паршин. Рязань: РГРТА. 1996. 80 с.
8. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2003. 604 с.

6. Оглавление

1. Краткие теоретические сведения	1
2. Описание лабораторного макета	9
3. Порядок выполнения работы	10
4. Контрольные вопросы	11